

应用均值不等式解决恒成立问题

知识点:

$$(1) \forall x \in D, a \geq f(x) \Leftrightarrow a \geq f_{\max}(x);$$

$$(2) \forall x \in D, a \leq f(x) \Leftrightarrow a \leq f_{\min}(x);$$

解题步骤:

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{分离参数}} \begin{cases} a \geq f(x) \\ a \leq f(x) \end{cases} \xrightarrow[\text{求解} f(x) \text{的最值}]{\text{利用均值不等式}} \begin{cases} a \geq f_{\max}(x) \\ a \leq f_{\min}(x) \end{cases}$$

例、当 $x > 0$ 时, 不等式 $x^2 - mx + 3 > 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

解答:

答案: $m < 2\sqrt{3}$

解析: 当 $x > 0$ 时, 不等式 $x^2 - mx + 3 > 0$ 恒成立

等价于: 当 $x > 0$ 时, $m < x + \frac{3}{x}$ 恒成立. 又 $x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$, $\therefore m < 2\sqrt{3}$

故答案为 $m < 2\sqrt{3}$

即时练习:

1、已知 $a > 0$, $b > 0$, 若不等式 $\frac{m}{3a+b} - \frac{3}{a} - \frac{1}{b} \leq 0$ 恒成立, 则 m 的最大值为 ()

A. 13

B. 14

C. 15

D. 16

答案: D

解析: 因为 $a > 0$, $b > 0$, 所以 $3a+b > 0$,

所以 $m \leq \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right)(3a+b)$ 恒成立, 只需 $m \leq \left[\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right)(3a+b)\right]_{\min}$,

因为 $a > 0$, $b > 0$, 所以 $\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right)(3a+b) = 9 + \frac{3a}{b} + \frac{3b}{a} + 1 \geq 10 + 2\sqrt{\frac{3a}{b} \times \frac{3b}{a}} = 16$,

当且仅当 $\frac{3a}{b} = \frac{3b}{a}$ 时, 即 $a=b$ 时取等号. 所以 $m \leq 16$. 即 m 的最大值为 16. 故选: D

2、当 $x > 1$ 时, 不等式 $x + \frac{1}{x-1} \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2]$

B. $[2, +\infty)$

C. $[3, +\infty)$

D. $(-\infty, 3]$

答案 D

解析: $\because$ 当 $x > 1$ 时, 不等式 $x + \frac{1}{x-1} \geq a$ 恒成立, $\therefore a \leq x + \frac{1}{x-1}$ 对 $x > 1$ 均成立.

由于 $x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 2 + 1 = 3$, 当且仅当 $x = 2$ 时取等号,

故 $x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值等于 3, $\therefore a \leq 3$, 则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 3]$.

故选: D.

3、不等式 $2x + m + \frac{1}{x-1} < 0$ 对一切 $x \in (-\infty, 1)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

答案: $m < 2\sqrt{2} - 2$

解析: $\because 2x + m + \frac{1}{x-1} < 0$ 对一切 $x \in (-\infty, 1)$ 恒成立,

$\therefore m < -2x - \frac{1}{x-1} = 2(1-x) + \frac{1}{1-x} - 2$ 对一切 $x \in (-\infty, 1)$ 恒成立,

$\because x < 1, \therefore 1-x > 0, \frac{1}{1-x} > 0, \therefore 2(1-x) + \frac{1}{1-x} \geq 2\sqrt{2(1-x) \cdot \frac{1}{1-x}} = 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $2(1-x) = \frac{1}{1-x}$, 即 $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号.

$\therefore$ 不等式 $2x + m + \frac{1}{x-1} < 0$ 对一切 $x \in \{x | x < 1\}$ 恒成立, $\therefore m < 2\sqrt{2} - 2$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $m < 2\sqrt{2} - 2$.

故答案为: $m < 2\sqrt{2} - 2$

4、若对任意正数 x , 不等式 $\frac{2}{x^2+4} \leq \frac{2a+1}{x}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[0, +\infty)$ B. $[-\frac{1}{4}, +\infty)$ C. $[\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

答案: B

解析: 依题意得, 当 $x > 0$ 时, $2a+1 \leq \frac{2x}{x^2+4} = \frac{2}{x+\frac{4}{x}}$ 恒成立, 又因为 $x+\frac{4}{x} \geq 4$,

当且仅当 $x=2$ 时取等号, 所以, $\frac{2}{x+\frac{4}{x}}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$,

所以 $2a+1 \leq \frac{1}{2}$, 解得 a 的取值范围为 $[-\frac{1}{4}, +\infty)$. 故选: B

5、若对任意 $x > 1$, 不等式 $\frac{x^2-4x+7}{x-1} \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $a \leq 2$

解析：∵ $x > 1$ ，∴ $x - 1 > 0$.

由题意得 $\frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2 - 2(x - 1) + 4}{x - 1} = (x - 1) + \frac{4}{x - 1} \geq 2\sqrt{(x - 1) \cdot \frac{4}{x - 1}} - 2 = 2$,

当且仅当 $x - 1 = \frac{4}{x - 1}$, 即 $x = 3$ 时等号成立.

∴ $a \leq 2$, ∴ 实数 a 的取值范围是 $a \leq 2$.

故答案为： $a \leq 2$