正弦、余弦定理的综合应用

例、在ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sqrt{3}b\sin A=a\cos B$.

（I）求B；

（II）若$b=3,\sin C=\sqrt{3}\sin A$，求$a,c$.

解析：（I）由$\sqrt{3}b\sin A=a\cos B$及正弦定理，得$\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin A\cos B$.

在ΔABC中，$\sin A\neq 0,\therefore \sqrt{3}\sin B=\cos B,\therefore \tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because 0<B<\pi,\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$.

（II）由$\sin C=\sqrt{3}\sin A$及正弦定理，得$c=\sqrt{3}a$，①

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$得，$3^2=a^2+c^2-2ac\cos\dfrac{\pi}{6}$，

即$a^2+c^2-\sqrt{3}ac=9$，②

由①②，解得$a=3,c=3\sqrt{3}$.

即时练习

1．（**2023天津高考真题**）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c．已知$a=\sqrt{39},b=2,\angle A=120°$．

(1)求$\sin B$的值；

(2)求c的值；

(3)求$\sin(B-C)$的值．

【答案】(1)$\frac{\sqrt{13}}{13}$

(2)5

(3)$-\frac{7\sqrt{3}}{26}$

【详解】（1）由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{\sqrt{39}}{\sin 120°}=\frac{2}{\sin B}$，解得：$\sin B=\frac{\sqrt{13}}{13}$；

（2）由余弦定理可得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$39=4+c^2-2\times 2\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

解得：$c=5$或$c=-7$（舍去）.

（3）由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{\sqrt{39}}{\sin 120°}=\frac{5}{\sin C}$，解得：$\sin C=\frac{5\sqrt{13}}{26}$，而$A=120°$，

所以B,C都为锐角，因此$\cos C=\sqrt{1-\frac{25}{52}}=\frac{3\sqrt{39}}{26}$，$\cos B=\sqrt{1-\frac{1}{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，

$\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\frac{\sqrt{13}}{13}\times\frac{3\sqrt{39}}{26}-\frac{2\sqrt{39}}{13}\times\frac{5\sqrt{13}}{26}=-\frac{7\sqrt{3}}{26}$.

2.（**2023·全国·高考真题**）已知在$\triangle ABC$中，$A+B=3C,2\sin(A-C)=\sin B$.

(1)求$\sin A$；

(2)设$AB=5$，求AB边上的高.

【答案】(1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2)6

【详解】（1）$\because A+B=3C$，

$\therefore \pi-C=3C$，即$C=\frac{\pi}{4}$，

又$2\sin(A-C)=\sin B=\sin(A+C)$，

$\therefore 2\sin A\cos C-2\cos A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

$\therefore \sin A\cos C=3\cos A\sin C$，

$\therefore \sin A = 3\cos A$,

即 $\tan A = 3$，所以 $0 < A < \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \sin A = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

（2）由（1）知，$\cos A = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

由 $\sin B = \sin(A + C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由正弦定理，$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$，可得 $b = \frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{10}$,

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot h = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A$,

$\therefore h = b\cdot\sin A = 2\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10} = 6$.

3．（**2022·全国·高考真题**）记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C\sin(A - B) = \sin B\sin(C - A)$.

(1)若 $A = 2B$，求 C；

(2)证明：$2a^2 = b^2 + c^2$

【答案】(1) $\frac{5\pi}{8}$；

(2)证明见解析．

【详解】（1）由 $A = 2B$，$\sin C\sin(A - B) = \sin B\sin(C - A)$ 可得，$\sin C\sin B = \sin B\sin(C - A)$，

而 $0 < B < \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin B \in (0,1)$，即有 $\sin C = \sin(C - A) > 0$，而 $0 < C < \pi, 0 < C - A < \pi$，

显然$C \neq C - A$，所以，$C + C - A = \pi$，而$A = 2B$，$A + B + C = \pi$，所以$C = \frac{5\pi}{8}$.

（2）由$\sin C\sin(A - B) = \sin B\sin(C - A)$可得，

$\sin C(\sin A\cos B - \cos A\sin B) = \sin B(\sin C\cos A - \cos C\sin A)$，再由正弦定理可得，

$ac\cos B - bc\cos A = bc\cos A - ab\cos C$，然后根据余弦定理可知，

$\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$，化简得：

$2a^2 = b^2 + c^2$，故原等式成立.

4．（**2022·天津·高考真题**）在$\triangle ABC$中，角 A、B、C 的对边分别为 a，b，c.已知$a = \sqrt{6}, b = 2c, \cos A = -\frac{1}{4}$.

(1)求c的值；

(2)求$\sin B$的值；

(3)求$\sin(2A - B)$的值.

【答案】(1)$c = 1$

(2)$\sin B = \frac{\sqrt{10}}{4}$

(3)$\sin(2A - B) = \frac{\sqrt{10}}{8}$

【详解】（1）因为$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$，即$6 = b^2 + c^2 + \frac{1}{2}bc$，而$b = 2c$，代入得$6 = 4c^2 + c^2 + c^2$，解得：$c = 1$.

（2）由（1）可求出$b = 2$，而$0 < A < \pi$，所以$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$，又$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$，所

以 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

（3）因为 $\cos A=-\frac{1}{4}$，所以 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$，故 $0<B<\frac{\pi}{2}$，又 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以

$\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$，而

$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{4}$，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

故 $\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)\times\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{10}}{8}$.

5.在△ABC中，a,b,c分别为内角A,B,C的对边，且$\frac{a}{\sqrt{3}\cos A}-\frac{c}{\sin C}=0$.

(1)求角A的大小；

(2)若$\sin B+\sin C=\sqrt{3}\sin A$，$b=2$，求$a$，$c$的值.

解析：（1）∵$\frac{a}{\sqrt{3}\cos A}-\frac{c}{\sin C}=0$，由正弦定理得 ∴$\frac{\sin A}{\sqrt{3}\cos A}-\frac{\sin C}{\sin C}=0$， 即

$\tan A=\sqrt{3}$，

∴$A=\frac{\pi}{3}$.

（2）∵$\sin B+\sin C=\sqrt{3}\sin A$，由正弦定理得$b+c=\sqrt{3}a$，

∵$b=2$，∴$\sqrt{3}a-c-2=0$，

由余弦定理$a^2=4+c^2-2c$，

两式联立解得$c=1$或$c=4$，

当$c=1$时$a=\sqrt{3}$；当$c=4$时$a=2\sqrt{3}$.

6. （**2021.天津卷**）在△ABC，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知

$\sin A:\sin B:\sin C=2:1:\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$.

（I）求a的值；

（II）求$\cos C$的值；

（III）求$\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)$的值.

【答案】（I）$2\sqrt{2}$；（II）$\frac{3}{4}$；（III）$\frac{3\sqrt{21}-1}{16}$

【解析】

【分析】（I）由正弦定理可得$a:b:c=2:1:\sqrt{2}$，即可求出；

（II）由余弦定理即可计算；

（III）利用二倍角公式求出$2C$的正弦值和余弦值，再由两角差的正弦公式即可求出.

【详解】（I）因为$\sin A:\sin B:\sin C=2:1:\sqrt{2}$，由正弦定理可得$a:b:c=2:1:\sqrt{2}$，

$\because b=\sqrt{2}$，$\therefore a=2\sqrt{2},c=2$；

（II）由余弦定理可得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{8+2-4}{2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$；

（III）$\because \cos C=\frac{3}{4}$，$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

$\therefore \sin 2C=2\sin C\cos C=2\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，$\cos 2C=2\cos^2 C-1=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$，

所以$\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2C\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2C\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{21}-1}{16}$.

小结：正弦定理；余弦定理